DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 h 30

N. B. — *Bien qu'appartenant à un même thème, les trois parties du problème sont largement indépendantes entre elles. Toutes les grandeurs considérées sont réelles. Toutes les fonctions considérées sont à une seule variable, notée x.*

I. Soit l'équation différentielle :

$$(E_I) \qquad y' = 1 - y^2$$

avec la condition à l'origine $y(0) = C$, où C est une constante donnée. On tracera le graphe de y' en fonction de y.

I. 1. Intégrer l'équation différentielle (E_I) en distinguant les trois cas : $|C| < 1$, $|C| = 1$, et $|C| > 1$. Donner les allures des courbes intégrales.

I. 2. On considère l'équation différentielle :

$$(E'_I) \qquad s' = 1 - 2us + u^2$$

avec la condition à l'origine $s(0) = C$, et : $|C| < 1$. u représente une fonction quelconque appartenant à l'ensemble U des fonctions numériques, définies sur $\mathbb{R}$ et continues. Montrer que :

$$\text{si } x < 0 : y = \operatorname*{Max}_{u \in U} s, \quad \text{et si } x > 0 : y = \min_{u \in U} s$$

c'est-à-dire montrer que, quel que soit $u \in U$, $v = y - s$ est positif ou nul si x est négatif, et est négatif ou nul si x est positif. On indiquera la fonction u particulière qui réalise les extremums.

II. Soit l'équation différentielle :

$$(E_{II}) \qquad y' = -y + y^2$$

avec la condition à l'origine $y(0) = C$, où C est une constante donnée telle que $|C| < 1$. On tracera le graphe de y' en fonction de y.

La résolution des questions qui suivent ne nécessite pas la résolution directe de l'équation (E_{II}). On admettra seulement que sa solution est unique et est continue, pour x croissant de zéro à l'infini.

II. 1. Montrer que si z_1 est solution de l'équation (E_{II}) avec $z_1(0) = C$, on peut construire le système différentiel de dimension infinie :

$$z'_n = -n z_n + n z_{n+1}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$, avec : $z_n(0) = C^n$.

Montrer que, pour x positif ou nul :

$$\lim_{n \to \infty} z_n = 0$$

au sens de la convergence uniforme.

II. 2. Le schéma itératif précédent est tronqué au rang N, suivant :

$$\tilde{z}'_n = -n \tilde{z}_n + n \tilde{z}_{n+1} \qquad \tilde{z}_n(0) = C^n \qquad n = 1, 2, \ldots, N-1$$
$$\tilde{z}'_N = -N \tilde{z}_N \qquad \tilde{z}_N(0) = C^N$$

Montrer que, pour x positif ou nul :

$$\lim_{N \to \infty} \tilde{z}_n = z_n \qquad n = 1, 2, \ldots, N$$

au sens de la convergence uniforme.

III. Soit l'équation différentielle :

$$(E_{III}) \qquad y' = u(x) + v(x)\, y + w(x)\, y^2$$

avec la condition à l'origine $y(0) = C$, où C est une constante donnée. Les fonctions $u(x)$, $v(x)$ et $w(x)$ sont des fonctions numériques données. On suppose que ce sont des polynômes ou des fonctions admettant un développement en série entière d'intervalle de convergence non nul. Elles sont définies par les suites finies ou infinies de leurs coefficients :

$$u(x) : \{u_0, u_1, u_2, \ldots\} ;$$
$$v(x) : \{v_0, v_1, v_2, \ldots\} ;$$
$$w(x) : \{w_0, w_1, w_2, \ldots\}$$

.../...

E.N.S.I. CHIMIE GROUPE CENTRE
1977 ×I03×

III. 1. Écrire la solution de (E_{III}) sous la forme :

$$y = a_0 + a_n x^n f(x)$$

où n est un entier positif et où $f(x)$ s'exprime par une série entière dont le terme constant est 1. Calculer a_0. Comment est défini le rang n? Calculer a_n.

III. 2. Soit maintenant : $g(x) = 1/f(x)$. Justifiant que $g(x)$ possède un développement en série entière d'intervalle de convergence non nul, montrer que cette fonction vérifie une équation différentielle d'un type comparable à (E_{III}).

On pose alors :

$$g = b_0 + b_m x^m h(x)$$

où m est un entier positif et où $h(x)$ s'exprime par une série entière dont le premier terme est 1. Si l'on répète le processus, on obtient le développement suivant :

$$y = a_0 + \cfrac{a_n x^n}{b_0 + \cfrac{b_m x^m}{c_0 + \ldots}}$$

Donner b_0 et c_0, et poser l'opération permettant de calculer b_m.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail